İmge ve Video İşleme İçin Matematiksel Modeller dersine ait aşağıda verilen her bir ödev için bildiri formatında ayrı ayrı rapor hazırlanacaktır.

Ödev 1:

Isı denklemi için enerji fonksiyoneli $J_{Dogrusal}(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega$ olarak verilebilir. Bu durumda doğrusal yayınım denklemi, Euler Lagrange yaklaşımına bağlı olarak Gradient Descent iteratif yöntemiyle $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t = \Delta u$ olarak elde edilir. Isı denkleminin, aşağıda ifade edildiği gibi, aslında Alçak Geçiren bir Süzgeç (AGS) davranışı gösterdiğini ispat ediniz. Sonuçlarınızı, 2-boyutlu gri-düzeyli ve/veya renkli görüntüler için, girdi görüntüsüne eklenmiş herhangi bir toplamsal gürültünün farklı standart sapmalarına bağlı olarak hem görsel hem sayısal (ör. ortalama kare hata ve işaret gürültü oranına bağlı) olarak veriniz.

$$u = f * g_{\sigma} \rightarrow u(j,k;t) = \iint f(j-x, k-y)\, g_{\sigma}(x,y) dxdy \qquad g_{\sigma}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \sigma^2 = 2t$$

Ödev 2:

Total Variation (TV) yöntemine ait enerji fonksiyonelleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$E_{TV}(u) = |u|_{TV} + \lambda \|f-u\|_{L^2}^2$$

$$E_{TV-L^1}(u) = |u|_{TV} + \lambda \|f-u\|_{L^1}$$

Görüntü işlemde, birinci denklem, düzgün dağılımlı (uniform) ve beyaz Gauss gürültülerinin giderilmesinde, ikinci denklem ise, dürtün (impulsive) gürültüsünün giderilmesinde kullanılabilir. Fidelity(uygunluk) terimleri, gürültülerin tiplerine bağlı olarak neden farklı seçilmiş olabilir? Kanıtlayınız ve sonuçlarınızı, 2-boyutlu gri-düzeyli ve/veya renkli görüntüler için, girdi görüntüsüne eklenmiş herhangi bir toplamsal gürültünün farklı standart sapmalarına bağlı olarak hem görsel hem sayısal (ör. ortalama kare hata ve işaret gürültü oranına bağlı) olarak veriniz.

Ayrıca, TV yönteminin yumuşatma (smoothing) terimi için enerji fonksiyoneli aşağıdaki gibi verilebilir:

$$J_{TV}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x,y)| d\Omega$$

Bu ifade çözümlendiğinde, $u_t = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$ elde edilir. Bu terimin açık halinin nasıl elde edilebileceğini Euler Lagrange yaklaşımına bağlı olarak Gradient Descent iteratif yöntemiyle adım adım gerçekleştiriniz.

Ödev 3:

Gri düzeyli 2-boyutlu bir u görüntüsü için yapı tensörü (structure tensor) aşağıdaki gibi verilsin:

$$\mathcal{J}(u) = \nabla u \nabla u^T = \begin{pmatrix} u_x^2 & u_x u_y \\ u_y u_x & u_y^2 \end{pmatrix}$$

Bu durumda yumuşatılmış yapı tensörü $\mathcal{J}_{\sigma}(u) = \mathcal{J}(u) * g_{\sigma}$ şeklinde ifade edilebilir. (Yumuşatılmış) yapı tensörüyle ortak değişinti (covariance) matrisi arasında nasıl bir ilişki kurulabileceğini, her iki yaklaşımın görüntü işlemede hangi alanlarda kullanılabileceğini araştırınız ve de örnek bir uygulamaya ait deneysel sonuçlarınızı 2-boyutlu gri düzeyli görüntüler üzerinden veriniz.

Ödev 4:

Renkli görüntü işlemede kullanılan iz (trace) tabanlı yöntem aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\frac{\partial \mathrm{u}_i}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{trace}(\mathbf{TH}_i)$$

Burada $\mathbf{T}$ yayınım tensörünü, $\mathbf{H}$ Hessian matrisini ve i ise imgedeki renk kanallarını temsil etmektedir. Verilen denklem, gürültü azaltma işleminde kullanıldığında, eğer varsa, nesne köşelerinde yuvarlatma etkileri ortaya çıkarmaktadır. Bunun nedenini ve yöntemin iyileştirilebilmesi için nasıl bir yaklaşım geliştirilebileceğini araştırınız. Ayrıca imge içboyama (inpainting) işleminde verilen denklemde yeniden ne gibi bir düzenleme yapılması gerekmektedir? Araştırarak ilgili deneysel sonuçlarınızı renkli imgeler üzerinden veriniz.

Ödev 5:

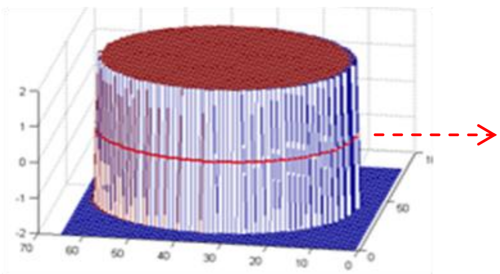
Düzey kümeleriyle imge bölütleme yapılırken, aşağıda verilen denklem yardımıyla, her iterasyonda düzey küme fonksiyonunun (level set function) düzenlileştirilmesi (regularization) gerekmektedir. Düzenlileştirme fonksiyonelinin niçin ısı denklemi (heat equation) biçiminde seçilemeyeceğini ve bu fonksiyonele en uygun bir şekilde nasıl bir setleme yapılabileceğini araştırınız. Olası seçilebilecek her düzenlileştirme yaklaşımı için, hem düzey küme fonksiyonunun 3-boyutlu şeklini grafiksel olarak hem de ilgili bölütleme sonuçlarınızı 2-boyutlu gri düzeyli imgeler üzerinden veriniz.

$$R_p(\Phi) = \int_\Omega p(|\nabla\Phi|)\,\mathrm{d}\Omega$$

Burada Φ düzey küme fonksiyonu, $p\colon [0,\infty) \rightarrow \mathcal{R}$ herhangi bir potansiyel fonksiyondur.

Ödev 6:

Kenar tabanlı düzey kümeleriyle (edge-based level sets) imge bölütlemesi yapılırken, geliştirilen çoğu yöntemde, işletmen (operator) tarafından bölütlenecek nesne başlangıçta kabaca seçilerek düzey küme fonksiyonuna bir ilk değer ataması yapılmak zorundadır. Düzey küme fonksiyonuna herhangi bir ilk değer ataması yapılmaksızın kenar tabanlı düzey kümeleriyle bölütleme işleminin tamamen otomatik bir şekilde geçekleştirilebilmesi için nasıl bir yaklaşım geliştirilebilir? Araştırınız ve sonuçlarınızı 2-boyutlu gri düzeyli imgeler üzerinden veriniz. Aşağıda, örnek olarak, ilk değer ataması yapılmış bir düzey küme fonksiyonu verilmiştir. Yöntemde, sıfır düzey çevriti belli bir iterasyon sonunda nesne kenarına konumlanabilmektedir.



Sıfır düzey çevriti (Zero level contour)

Ödev 7:

Klasik yaklaşımlarla imge bölütlemenin zorluklarından bir tanesine de imge yeğinliğinin homojen olmaması (intensity inhomogeneity - intensity nonuniformity) gösterilebilir. Bu durumda, örneğin, Chan-Vese tarafından geliştirilen bölge-tabanlı (region-based) imge bölütleme yaklaşımı, yeğinliği homojen bir şekilde dağılım göstermeyen imgeleri bölütlemede başarılı olamamaktadır. Bu tür sakıncaları giderilebilmek için bölge-tabanlı düzey kümeleriyle bölütleme yaklaşımları nasıl iyileştirilebilir? Araştırınız ve sonuçlarınızı 2-boyutlu gri düzeyli imgeler üzerinden veriniz.

Aşağıda Chan-Vese tarafından geliştirilen bölge-tabanlı bölütleme modeli için enerji fonksiyoneli verilmiştir.

$$E_{CV}(\mathrm{C}, \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2) = \lambda_1 \int_{\text{iç taraf(C)}} (f - \mathrm{c}_1)^2 \, \mathrm{d}\Omega + \lambda_2 \int_{\text{dış taraf(C)}} (f - \mathrm{c}_2)^2 \, \mathrm{d}\Omega + \mu|\mathrm{C}|$$

Burada C bölütlenecek nesnenin kenarına uydurulacak kapalı bir eğri, c_1 ve c_2, C eğrisinin sırasıyla iç ve dış bölgesindeki yaklaşık olarak ortalama imge yeğinliklerini gösteren sabitler ve λ_1, λ_2 ve μ işlenecek imgeye göre ayarlanması gereken katsayılardır.

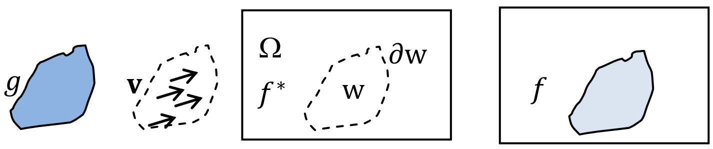
Ödev 8:

Fotomontaj işlemi için, Poisson denklemine bağlı olarak aşağıda verilen enerji fonksiyonelinin Dirichlet sınır koşullarına bağlı olarak enküçüklenmesi gerekmektedir:

$$\min_{f} \int_{\mathrm{w}} |\nabla f - \mathbf{v}|^2 \, d\mathrm{w} \, , f|_{\partial \mathrm{w}} = f^*|_{\partial \mathrm{w}}$$

Burada $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ fotomontaj yapılacak gri düzeyli bir sonuç imgesini, $\mathbf{v}$ herhangi bir g kaynak imgesinden elde edilebilecek kılavuz vektör alanını, f^* montajlamada kullanılacak arkaplan imgesini ve $\partial \mathrm{w}$, w imge düzenleme bölgesinin sınırını (boundary) göstermektedir.

Verilen denklemin çözümlenmesi için doğrudan ve iteratif yöntemleri araştırınız ve en az **2 yöntem** için elde edilecek sonuçların performans analizlerini yapınız (Verilen denklem farklı yaklaşımlara bağlı olarak hem Neumann hem de Dirichlet sınır koşullarına göre çözülebilir).



Ödev 9:

Gri düzeyli imgeleri renklendirmek (colorization) için, Poisson denklemine bağlı olarak aşağıda verilen enerji fonksiyoneli enküçüklenebilir:

$$\min_{C_b} \int_{\Omega} |\nabla Y - \nabla C_b|^2 \, \mathrm{d}\Omega$$

Burada Y ışıklılık (luminance) kanalını, C_b ise renk kanallarından bir tanesini göstermektedir. Yukarıda verilen denklem, Dirichlet sınır koşullarına göre çözülebilir. C_b ve C_r renk kanallarına ait Ω_{renkli} bölgesindeki kılavuz renkleri (kesin kısıtlar), denklem çözümünde sınır şartlarını vermek şartıyla, C_b ve C_r renk kanallarının kestirimi yapılır. Bu durumda $|\Omega_{\mathrm{renkli}}| \ll |\Omega|$ olduğu varsayılmaktadır.

Yukarıda verilenlere bağlı olarak eski-tarihi fotoğrafların renklendirme işlemlerini yapınız ve ilgili renklendirme sonuçlarınızı veriniz.

Ödev 10:

İmge dizilerindeki optik akışı kestirmek için aşağıdaki Horn-Schunk yaklaşımı kullanılabilir:

$$E_{HS} = \int_{\Omega} \left(f_x v_1 + f_y v_2 + f_t\right)^2 + \alpha(|\nabla v_1|^2 + |\nabla v_2|^2)\, \mathrm{d}\Omega$$

Burada $f(x, y, t)$ görüntü dizisini, (x, y) uzamsal koordinatları, t zamanı, α düzenlileştirme ağırlığını ve $\mathrm{v} = (v_1, v_2)^T$ ise her bir piksel için yerdeğiştirme vektörünü (displacement vector) göstermektedir.

Önerilen yöntemin çözümlenmesi için nasıl bir sayısal yaklaşım geliştirilebilir? Ayrıca yöntemin başarılı ve başarısız olduğu durumlar neler olabilir? Araştırınız ve sonuçlarınızı 2-boyutlu gri düzeyli imgeler üzerinden veriniz.

Bekir DIZDAROGLU